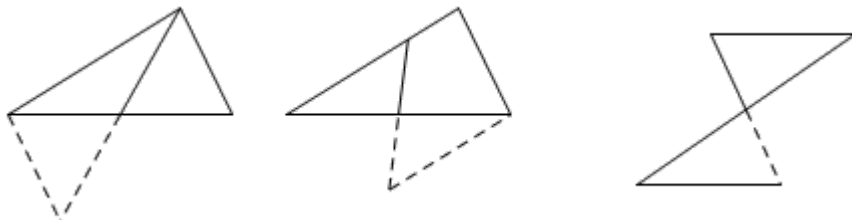


第2讲 中点辅助线综合

一、倍长中线

倍长中线常见模型：

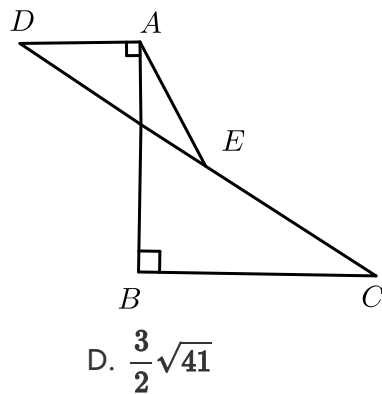


【教法备注】

将中线或“类”中线延长一倍，构成八字全等，从而将分散条件集中在一个三角形内，达到**转移线段、转移角、进而出平行**的目的。

例题1

1. 如图，已知 $AB = 12$ ， $AB \perp BC$ 于 B ， $AB \perp AD$ 于 A ， $AD = 5$ ， $BC = 10$ 。点 E 是 CD 的中点，则 AE 的长为（ ）。



A. 6

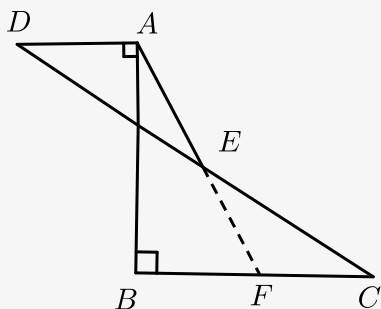
B. $\frac{13}{2}$

C. 5

D. $\frac{3}{2}\sqrt{41}$

【答案】 B

【解析】 延长 AE 交 BC 于 F ，如图所示：



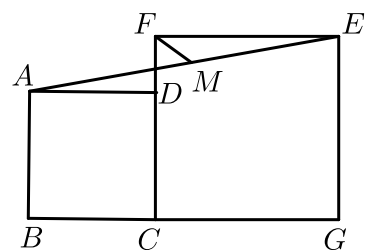
$\because AB \perp BC, AB \perp AD,$
 $\therefore AD \parallel BC,$
 $\therefore \angle D = \angle C,$
 $\because$ 点 E 是 CD 的中点,
 $\therefore DE = CE,$
 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle D = \angle C \\ DE = CE \\ \angle AED = \angle FEC \end{cases},$$

 $\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE (ASA),$
 $\therefore AE = FE, AD = CF = 5,$
 $\therefore BF = BC - CF = 5,$
 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $AF = 13,$
 $\therefore AE = \frac{1}{2}AF = \frac{13}{2}.$
 故选 B.

【标注】【知识点】勾股定理与全等

2. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CGEF$ 的边长分别是 2 和 3，且点 B, C, G 在同一直线上， M 是线段 AE 的中点，连接 MF ，则 MF 的长为（ ）。



A. $\sqrt{2}$

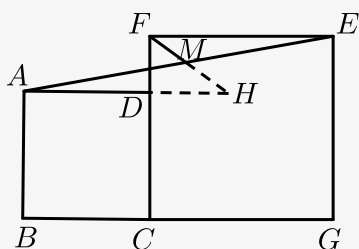
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【答案】B

【解析】延长 AD 至 H ，延长 FM 与 AH 交于 H 点，



则在 $\triangle AMH$ 和 $\triangle EMF$ 中，

$$\begin{cases} \angle MAH = \angle FEM \\ EM = AM \\ \angle AHM = \angle EFM \end{cases},$$

$\therefore \triangle AMH \cong \triangle EMF$ ，即 $FM = MH$ ， $AH = EF$ ，

$\therefore DH = AH - AD = EF - AD = 1$ ，

$\therefore DF = CF - CD = 3 - 2 = 1$ ，

在直角 $\triangle DFH$ 中， FH 为斜边，

解直角 $\triangle DFH$ 得： $FH = \sqrt{2}$ ，

又 $\therefore FM = MH$ ，

$$\therefore FM = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

故选B.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】正方形的性质

【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

【知识点】ASA

3. 请回答下列各题.

(1) 方法回顾

在学习三角形中位线时，为了探索三角形中位线的性质，思路如下：

第一步添加辅助线：如图1，在 $\triangle ABC$ 中，延长 DE （ D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点）到点 F ，使得 $EF = DE$ ，连接 CF ；

第二步证明 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ ，再证四边形 $DBCF$ 是平行四边形，从而得到_____。（直接填写三角形中位线性质定理）

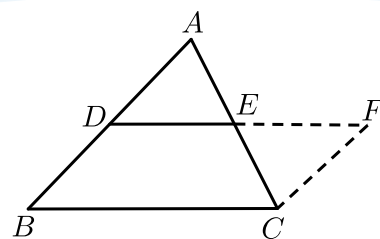


图 1

(2) 问题解决

如图2, 在正方形 $ABCD$ 中, E 为 AD 的中点, G 、 F 分别为 AB 、 CD 边上的点, 若 $AG = 2$, $DF = 3$, $\angle GEF = 90^\circ$, 求 GF 的长.

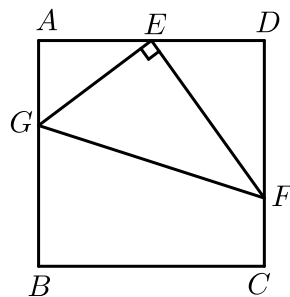


图 2

(3) 拓展研究

如图3, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 105^\circ$, $\angle D = 120^\circ$, E 为 AD 的中点, G 、 F 分别为 AB 、 CD 边上的点, 若 $AG = 3$, $DF = 2\sqrt{2}$, $\angle GEF = 90^\circ$, 求 GF 的长.

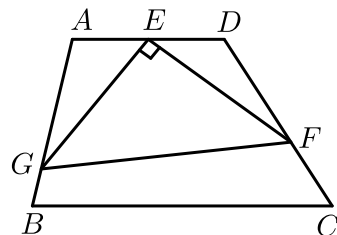


图 3

【答案】 (1) 三角形的中位线平行于第三边, 并且等于第三边的一半

(2) 5 .

(3) $\sqrt{29}$.

【解析】 (1) 三角形中位线定理 .

(2) 如图2, 延长 GE 、 FD 交于点 H ,

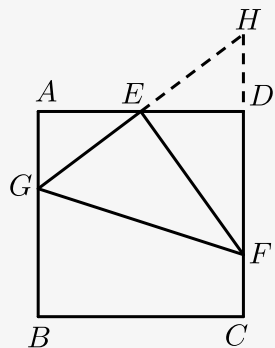


图 2

$\because E$ 为 AD 中点 ,

$\therefore EA = ED$ 且 $\angle A = \angle EDH = 90^\circ$,

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle DEH$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle A = \angle HDE \\ EA = ED \\ \angle AEG = \angle HED \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle DEH (ASA)$,

$\therefore AG = HD = 2$, $EG = EH$,

$\therefore \angle GEF = 90^\circ$,

$\therefore EF$ 垂直平分 GH ,

$\therefore GF = HF = DH + DF = 2 + 3 = 5$.

(3) 如图3 , 过 D 点作 AB 的平行线交 GE 的延长线于点 H , 作 $HP \perp CD$ 于 P , 连接 HF

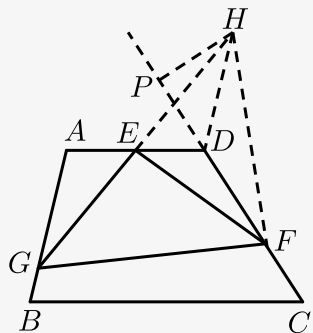


图 3

由 (2) 知 $\triangle AEG \cong \triangle DEH$, $GF = HF$,

$\therefore \angle A = \angle HDE = 105^\circ$, $AG = HD = 3$,

$\therefore \angle ADC = 120^\circ$,

$\therefore \angle HDF = 360^\circ - 105^\circ - 120^\circ = 135^\circ$,

$\therefore \angle HDP = 45^\circ$,

$\therefore \triangle PDH$ 为等腰直角三角形 ,

$$\therefore PD = PH = \frac{3\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\therefore PF = PD + DF = \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2} ,$$

在 $\text{Rt}\triangle HFP$ 中, $\angle HPF = 90^\circ$,

$$\therefore HF = \sqrt{HP^2 + PF^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{29},$$

$$\therefore GF = \sqrt{29}.$$

【标注】【知识点】倍长(类)中线

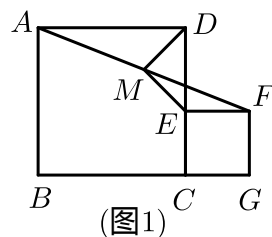
练习1

4. 已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $CEFG$ (点 C 、 E 、 F 、 G 按顺时针排列), M 是 AF 的中点, 连接 DM , EM .

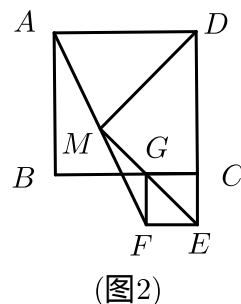
(1) 如图1, 点 E 在 CD 上, 点 G 在 BC 的延长线上,

求证: $DM = EM$, $DM \perp EM$.

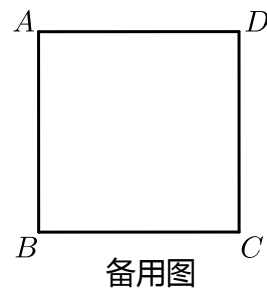
简析: 由 M 是 AF 的中点, $AD \parallel EF$, 不妨延长 EM 交 AD 于点 N , 从而构造出一对全等的三角形, 即 $\triangle DNE \cong \triangle FME$. 由全等三角形性质, 易证 $\triangle DNE$ 是等腰直角三角形, 进而得出结论.



- (2) 如图2, E 在 DC 的延长线上, 点 G 在 BC 上, (1)中结论是否成立? 若成立, 请证明你的结论; 若不成立, 请说明理由.



- (3) 当 $AB = 5$, $CE = 3$ 时, 正方形 $CEFG$ 的顶点 C 、 E 、 F 、 G 按顺时针排列. 若点 E 在直线 CD 上, 则 $DM =$; 若点 E 在直线 BC 上, 则 $DM =$.

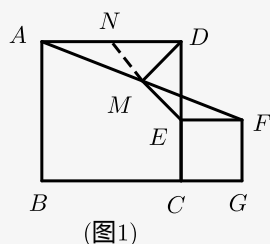


【答案】(1) $\triangle AMN$; $\triangle FME$; 等腰直角三角

(2) 成立, 证明见解析.

(3) $\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$

【解析】(1) 如图1, 延长 EM 交 AD 于点 N ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, 四边形 $EFGC$ 是正方形,

$\therefore \angle ADE = \angle DEF = 90^\circ$, $AD = CD$,

$\therefore AD \parallel EF$,

$\therefore \angle MAN = \angle MFE$,

在 $\triangle MNA$ 和 $\triangle MEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle MAN = \angle MFE \\ AM = FM \\ \angle AMN = \angle FME \end{cases},$$

$\therefore \triangle MNA \cong \triangle MEF$ (ASA),

$\therefore MN = ME$, $AN = EF = EC$,

$\therefore DN = DE$, 且 $\angle EDN = 90^\circ$,

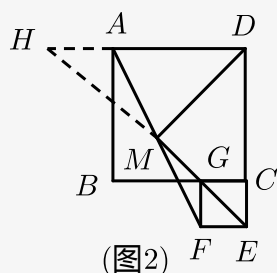
$\therefore \triangle DEN$ 是等腰直角三角形,

$\therefore DM = ME$, $DM \perp EM$.

故答案为: $\triangle AMN$, $\triangle FME$, 等腰直角.

(2) 结论仍成立,

如图2, 延长 EM 交 DA 的延长线于点 H ,



(图2)

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, 四边形 $EFGC$ 是正方形,

$\therefore \angle ADE = \angle DEF = 90^\circ$, $AD = CD$,

$\therefore AD \parallel EF$,

$\therefore \angle MAH = \angle MFE$,

$\because AM = MF$, $\angle AMH = \angle FME$,

$\therefore \triangle AMH \cong \triangle FME (ASA)$,

$\therefore MH = ME$, $AH = EF = EC$,

$\therefore DH = DE$,

$\therefore \angle EDH = 90^\circ$,

$\therefore DM \perp EM$, $DM = ME$.

(3) 若点 E 在直线 CD 上, 由 (1) (2) 可知,

$DE = AB - CE = 2$, 或 $DE = AB + CE = 8$,

$\because DM \perp EM$, $DM = ME$,

$\therefore DE = \sqrt{2}DM$,

$\therefore DM = \sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2}$,

若点 E 在直线 BC 上,

如图3, 当点 E 在 BC 延长线上时, 延长 EM 交 DA 于点 H , 连接 DH ,

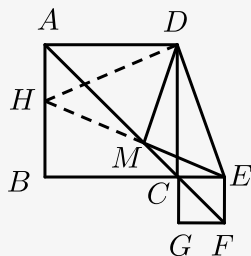


图3

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, 四边形 $EFGC$ 是正方形,

$\therefore \angle ADC = \angle GCE = 90^\circ = \angle BAD$, $AD = CD$,

$\therefore AB \parallel EF$,

$\therefore \angle MAH = \angle MFE$,

$\because AM = MF$, $\angle AMH = \angle FME$,

$\therefore \triangle AMH \cong \triangle FME (ASA)$,

$$\begin{aligned}
&\therefore MH = ME, AH = EF = EC, \\
&\therefore AH = CE, \angle HAD = \angle ECD, AD = CD, \\
&\therefore \triangle ADH \cong \triangle CDE (\text{SAS}), \\
&\therefore DH = DE, \angle ADH = \angle CDE, \\
&\therefore \angle ADH + \angle HDC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle EDH = 90^\circ, \text{且 } HM = ME, \\
&\therefore DM \perp EM, DM = ME, \\
&\therefore DE = \sqrt{2}DM, \\
&\therefore AB = CD = 5, CE = 3, \\
&\therefore DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}, \\
&\therefore DM = \sqrt{17},
\end{aligned}$$

如图4,

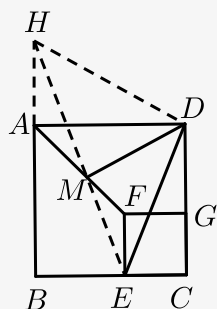


图4

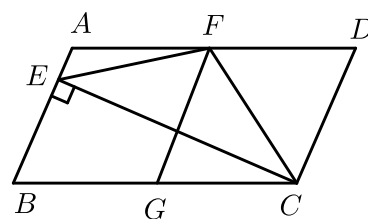
若点E在线段BC上时, 延长EM, BA交于点H, 连接DH,

同理可求 $DM = \sqrt{17}$,

故答案为: $\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2}, \sqrt{17}$.

【标注】【知识点】倍长(类)中线

5. 如图, 在平行四边形ABCD中, $AD = 2AB$, $CE \perp AB$ 于点E, 点F、G分别是AD、BC的中点, 连接CF、EF、FG, 下列结论:
- ① $CE \perp FG$;
 - ② 四边形ABGF是菱形;
 - ③ $EF = CF$;
 - ④ $\angle EFC = 2\angle CFD$. 其中正确的个数是 ().



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 D

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC, AD = BC,$

$\because$ 点 F, G 分别是 AD, BC 的中点，

$\therefore AF = \frac{1}{2}AD, BG = \frac{1}{2}BC,$

$\therefore AF = BG,$

$\therefore AF \parallel BG,$

$\therefore$ 四边形 $ABGF$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel FG,$

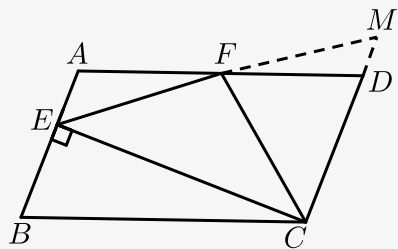
$\because CE \perp AB,$

$\therefore CE \perp FG$ ，故①正确；

$\because AD = 2AB, AD = 2AF,$

$\therefore AB = AF,$

$\therefore$ 四边形 $ABGF$ 是菱形，故②正确；



延长 EF ，交 CD 延长线于 M ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD,$

$\therefore \angle A = \angle MDF,$

$\because F$ 为 AD 中点，

$\therefore AF = FD,$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DFM$ 中，
$$\begin{cases} \angle A = \angle FDM \\ AF = DF \\ \angle AFE = \angle DFM \end{cases},$$

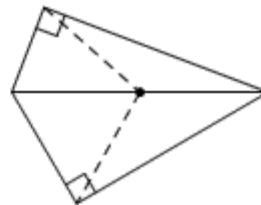
$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DMF(ASA)$,
 $\therefore FE = MF$, $\angle AEF = \angle M$,
 $\therefore CE \perp AB$,
 $\therefore \angle AEC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle AEC = \angle ECD = 90^\circ$,
 $\therefore FM = EF$,
 $\therefore FC = EF = FM$, 故③正确 ;
 $\therefore \angle FCD = \angle M$,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 ,
 $\therefore AB = CD$, $AD \parallel BC$,
 $\therefore AF = DF$, $AD = 2AB$,
 $\therefore DF = DC$,
 $\therefore \angle DCF = \angle DFC$,
 $\therefore \angle M = \angle FCD = \angle CFD$,
 $\therefore \angle EFC = \angle M + \angle FCD = 2\angle CFD$, 故④正确 .
 故选D .

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

二、 直角三角形斜边中线

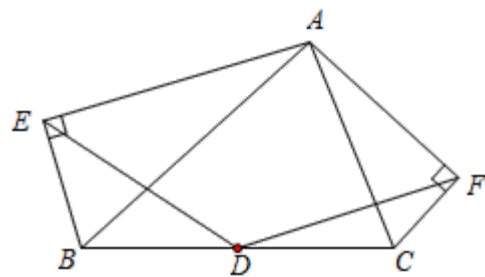
直角三角形斜边中线等于斜边_____ , 作直角三角形的斜边中线是常用辅助线.

斜边中线常见辅助线 :



【典型模型】：构造斜边中线

如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , D 为 BC 中点 , 以 AB 、 AC 为斜边构建 $\text{Rt}\triangle ABE$ 、 $\text{Rt}\triangle ACF$,
 $\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ$, $\angle EAB = \angle FAC$, 则 DE ___ DF .



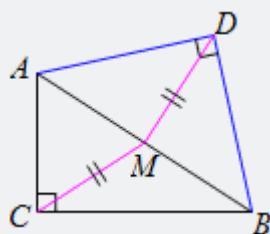
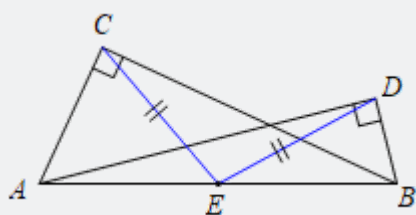
【教法备注】

直角三角形斜边中线等于斜边一半，作直角三角形的斜边中线是常用辅助线。（斜边出现中点，连接直角顶点与中点构造斜边中线）

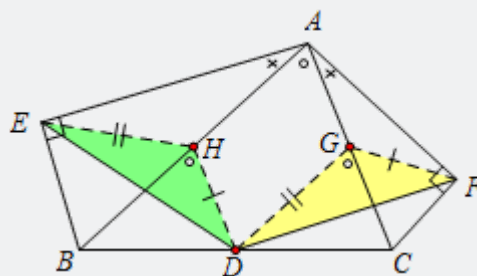
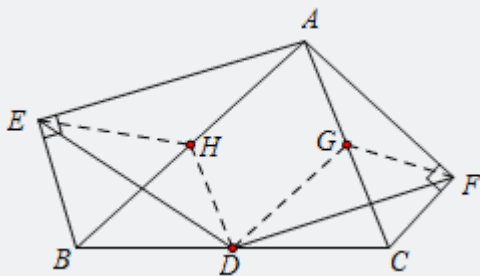
1、遇存在公共边的两个直角三角形时，要想到构造两个直角三角形斜边的中线。

如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ABD$ 有公共斜边 AB 。

辅助线作法：取 AB 中点 M ，连接 CM 、 DM ，可证明 $CM=DM$ 。



2、证明：斜边中线+中位线法



证明：取 AB 、 AC 中点 H 、 G ，连接 EH 、 DH 、 FG 、 DG ，

$\because \triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 是直角三角形，

$$\therefore EH = \frac{1}{2}AB = AH, FG = \frac{1}{2}AC = AG,$$

$$\therefore \angle EHB = 2\angle EAB, \angle FGC = 2\angle FAC,$$

$$\because \angle EAB = \angle FAC,$$

$$\therefore \angle EHB = \angle FGC.$$

$\because$ 点 D 、 H 、 G 分别为 BC 、 AB 、 AC 的中点，

$$\therefore DH = \frac{1}{2}AC = AG, DG = \frac{1}{2}AB = AH, DH \parallel AC, DG \parallel AB,$$

$$\therefore DH = FG, DG = EH, \text{四边形} AHDG \text{为平行四边形},$$

$$\therefore \angle BHD = \angle CGD,$$

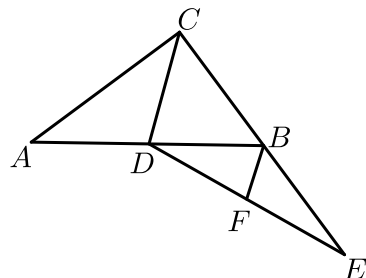
$$\therefore \angle EHD = \angle DGF,$$

$$\therefore \triangle EHD \cong \triangle DGF (\text{SAS}),$$

$$\therefore DE = DF.$$

|| 例题2

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 为中线，延长 CB 至点 E ，使 $BE = BC$ ，连接 DE ， F 为 DE 中点，连接 BF 。若 $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，则 BF 的长为（ ）。



A. 2

B. 2.5

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 $\because BE = BC$ 且 F 为 DE 中点，

$$\therefore BF \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{BF}{CD} = \frac{BE}{CE} = \frac{BE}{BE + BC} = \frac{1}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中，

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

$\because CD$ 为 $\text{Rt}\triangle ACB$ 斜边中线，

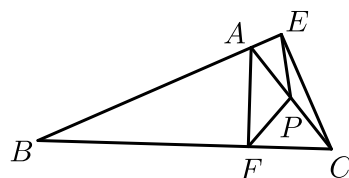
$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5,$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 5 = 2.5.$$

故选 B.

【标注】【知识点】平行线分线段成比例定理

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 为钝角， AF 、 CE 都是这个三角形的高， P 为 AC 的中点，若 $\angle B = 40^\circ$ ，则 $\angle EPF =$ _____。

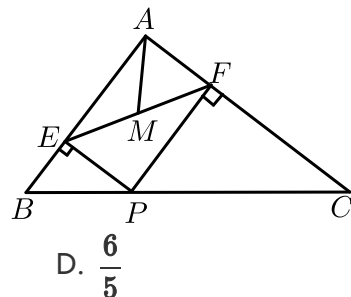


【答案】 100°

【解析】 $\because CE \perp BA, \angle B = 40^\circ,$
 $\therefore \angle C = 50^\circ,$
 $\because AF \perp BC, CE \perp BA, P$ 为 AC 的中点,
 $\therefore PF = \frac{1}{2}AC = PC, PE = \frac{1}{2}AC = PC,$
 $\therefore \angle PFC = \angle PCF, \angle PEC = \angle PCE,$
 $\therefore \angle EPF = 2\angle PCF + 2\angle PCE = 2\angle C = 100^\circ.$
故答案为： 100° .

【标注】 【知识点】 三角形的倒角问题

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3, AC = 4, BC = 5, P$ 为边 BC 上一动点， $PE \perp AB$ 于 E ， $PF \perp AC$ 于 F ， M 为 EF 中点，则 AM 的最小值为（ ）.



A. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{5}{3}$

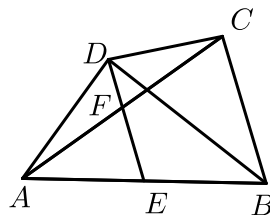
D. $\frac{6}{5}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3, AC = 4, BC = 5,$
 $\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2,$
即 $\angle BAC = 90^\circ.$
又 $\because PE \perp AB$ 于 $E, PF \perp AC$ 于 $F,$
 $\therefore$ 四边形 $AEPF$ 是矩形，
 $\therefore EF = AP.$
 $\because M$ 是 EF 的中点，
 $\therefore AM = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}AP.$
因为 AP 的最小值即为直角三角形 ABC 斜边上的高，即等于 $\frac{12}{5},$
 $\therefore AM$ 的最小值是 $\frac{6}{5}.$
故选：D.

【标注】 【知识点】 矩形的性质

9. 如图, AC, BD 是四边形 $ABCD$ 对角线, $AD \perp BD$, 点 E 是 AB 的中点, 连接 DE 交 AC 于点 F , $AF = CF$, $DF = \frac{1}{3}DE$, 若 $BC = 12$, 则 AB 长为 _____.



【答案】 18

【解析】 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$\because E$ 为 AB 中点,

$\therefore AE = BE = DE$.

$\therefore AB = 2DE$.

又 $DF = \frac{1}{3}DE$.

$\therefore EF = \frac{2}{3}DE$.

$\therefore DE = \frac{3}{2}EF$.

又 F 为 AC 中点,

$\therefore EF$ 为 $\triangle ABC$ 中位线.

$\therefore EF = \frac{1}{2}BC = 6$.

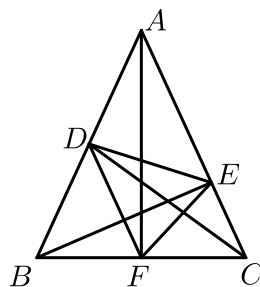
$\therefore DE = \frac{3}{2} \times 6 = 9$.

$\therefore AB = 2 \times 9 = 18$.

【标注】 【知识点】 直角三角形斜边中线性质的应用

练习2

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 7$, $BC = 5$, $AF \perp BC$ 于 F , $BE \perp AC$ 于 E , D 是 AB 的中点, 则 $\triangle DEF$ 的周长是 _____.



【答案】 $\frac{19}{2}$

【解析】 $\because AB = AC = 7, BC = 5, AF \perp BC$ 于 $F, BE \perp AC$ 于 E, D 是 AB 的中点,

$\therefore \triangle BCE$ 是直角三角形, EF 是 $\text{Rt}\triangle BCE$ 的中线,

$$EF = BF = FC = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2},$$

又 $\because$ 点 D 是 AB 的中点,

$\therefore DF$ 是 $\text{Rt}\triangle AFB$ 的中线, DE 是 $\text{Rt}\triangle AEB$ 的中线,

$$\therefore DE = DF = \frac{1}{2}BC = \frac{7}{2},$$

$$\therefore \text{三角形 } DEF \text{ 的周长} = DE + DF + EF = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{19}{2}.$$

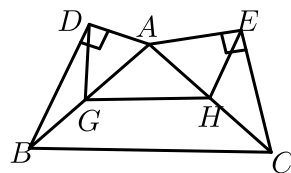
故答案为: $\frac{19}{2}$.

【标注】 【知识点】 直角三角形斜边中线性质的应用

【知识点】 三角形的周长与面积问题

【能力】 推理论证能力

11. 如图 $\triangle ABC$ 的周长为 16, G, H 分别为 AB, AC 的中点, 分别以 AB, AC 为斜边向外作 $\text{Rt}\triangle ADB$ 和 $\text{Rt}\triangle AEC$, 连接 DG, GH, EH , 则 $DG + GH + EH$ 的值为().



A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】 C

【解析】 $\because G, H$ 分别为 AB, AC 的中点, $\triangle ADB$ 和 $\triangle AEC$ 为直角三角形,

$$\therefore DG = \frac{1}{2}AB, EH = \frac{1}{2}AC,$$

$\therefore GH$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

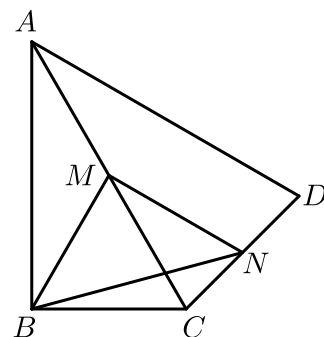
$$\therefore GH = \frac{1}{2}BC,$$

$$\begin{aligned}\therefore DG + GH + EH &= \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \\ &= \frac{1}{2} \times 16 = 8\end{aligned}$$

故选: C.

【标注】 【知识点】 直角三角形斜边中线性质的应用

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = AD$ ， M ， N 分别为 AC ， CD 的中点，连接 BM ， MN ， BN 。



- (1) 求证： $BM = MN$ 。
 (2) $\angle BAD = 60^\circ$ ， AC 平分 $\angle BAD$ ， $AC = 2$ ，求 BN 的长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $BN = \sqrt{2}$ 。

【解析】 (1) 在 $\triangle CAD$ 中，

$\because M$ 、 N 分别是 AC 、 CD 的中点，

$$\therefore MN \parallel AD, MN = \frac{1}{2}AD,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$\because M$ 是 AC 中点，

$$\therefore BM = \frac{1}{2}AC,$$

$\because AC = AD$,

$$\therefore MN = BM.$$

(2) $\because \angle BAD = 60^\circ$ ， AC 平分 $\angle BAD$ ，

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\text{由 (1) 可知, } BM = \frac{1}{2}AC = AM = MC,$$

$$\therefore \angle BMC = \angle BAM + \angle ABM = 2\angle BAM = 60^\circ,$$

$\because MN \parallel AD$,

$$\therefore \angle NMC = \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BMN = \angle BMC + \angle NMC = 90^\circ,$$

$$\therefore BN^2 = BM^2 + MN^2,$$

$$\text{由 (1) 可知 } MN = BM = \frac{1}{2}AC = 1,$$

$$\therefore BN = \sqrt{2}.$$

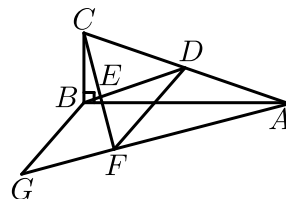
【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

【知识点】中位线定理及其应用

【知识点】角分线性质的定理

【能力】推理论证能力

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， BD 为 AC 的中线，过点 C 作 $CE \perp BD$ 于点 E ，过点 A 作 BD 的平行线，交 CE 的延长线于点 F ，在 AF 的延长线上截取 $FG = BD$ ，连接 BG 、 DF 。若 $CF = 6$ ， $AC = AF + 2$ ，则四边形 $BDFG$ 的周长为（ ）。



A. 9.5

B. 10

C. 12.5

D. 20

【答案】D

【解析】 $\because AG \parallel BD$ ， $BD = FG$ ，

$\therefore$ 四边形 $BGFD$ 是平行四边形，

$\because CF \perp BD$ ，

$\therefore CF \perp AG$ ，

又 $\because$ 点 D 是 AC 中点，

$\therefore BD = DF = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $BGFD$ 是菱形，

设 $AF = x$ ，则 $AC = x + 2$ ， $FC = 6$ ，

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中， $\angle CFA = 90^\circ$ ，

$\therefore AF^2 + CF^2 = AC^2$ ，

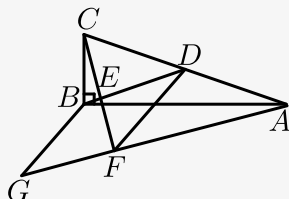
即 $x^2 + 6^2 = (2 + x)^2$ ，

解得： $x = 8$ ，

$\therefore AC = 10$ ，

$\therefore$ 四边形 $BDFG$ 的周长 $= 4BD = 2 \times 10 = 20$ 。

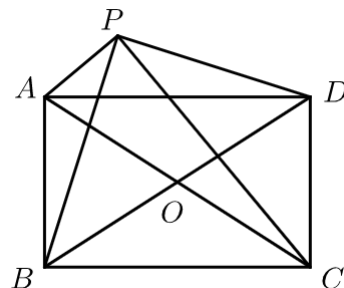
故选：D。



【标注】【知识点】菱形的判定-从四边形

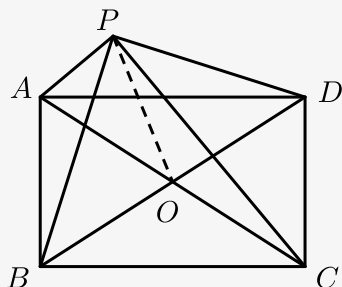
例题3

14. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， AC ， BD 交于点 O ， P 是平行四边形 $ABCD$ 外一点，且 $\angle APC = \angle BPD = 90^\circ$ ，求证：平行四边形 $ABCD$ 是矩形．



【答案】证明见解析．

【解析】连接 PO ，

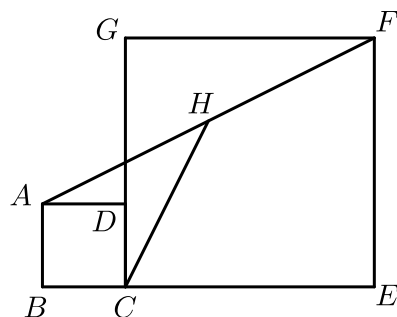


$\because O$ 是 AC 、 BD 的中点，
 $\therefore AO = CO$ ， $BO = DO$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle PBD$ 中，
 $\because O$ 为 BD 中点，
 $\therefore PO = \frac{1}{2}BD$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中，
 $\because O$ 为 AC 中点，
 $\therefore PO = \frac{1}{2}AC$ ，
 $\therefore AC = BD$ ，
 又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
 $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形．

【标注】【知识点】矩形的判定-从平行四边形

15.

如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中，点 D 在 CG 上， $BC = 1$ ， $CE = 3$ ，点 H 是 AF 的中点，那么 CH 的长是 _____ 。



【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 连接 CA 、 CF ，

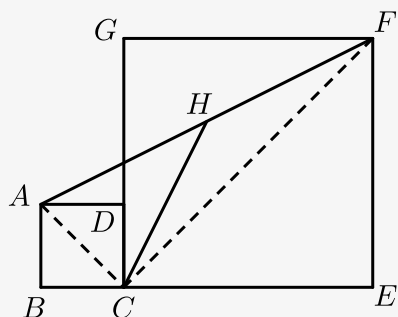
$\because CA$ 、 CF 是正方形 $ABCD$ 、 $CEFG$ 的对角线，

$\therefore \angle ACD = \angle GCF = 45^\circ$ ， $AC = \sqrt{2}$ ， $CF = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore \angle ACF = 90^\circ$ ， $AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = 2\sqrt{5}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中， H 是 AF 的中点，

$\therefore CH = \frac{1}{2}AF = \sqrt{5}$ 。

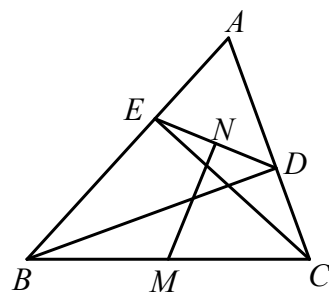


【标注】 【知识点】正方形的性质

【知识点】勾股定理的综合应用

【能力】推理论证能力

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BD \perp AC$ 于 D ， $CE \perp AB$ 于 E ， M ， N 分别是 BC ， DE 的中点。



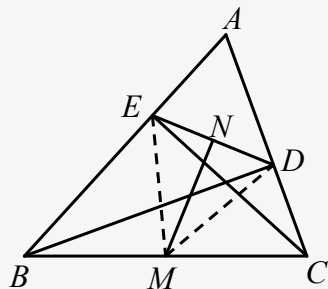
(1) 求证: $MN \perp DE$.

(2) 若 $BC = 20$, $DE = 12$, 求 $\triangle MDE$ 的面积.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 48.

【解析】(1) 连接 ME 、 MD ,



$\because BD \perp AC$,

$\therefore \angle BDC = 90^\circ$,

$\because M$ 是 BC 的中点,

$\therefore DM = \frac{1}{2}BC$, 同理可得 $EM = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore DM = EM$,

$\because N$ 是 DE 的中点,

$\therefore MN \perp DE$.

(2) $\because BC = 20$, $DE = 12$,

$\therefore DM = \frac{1}{2}BC = 10$, $DN = \frac{1}{2}DE = 6$,

由 (1) 可知 $\angle MND = 90^\circ$,

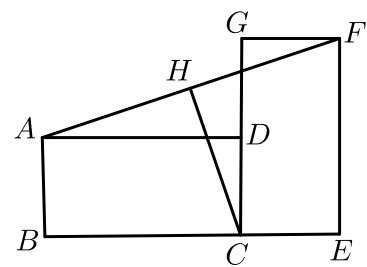
$\therefore MN = \sqrt{MD^2 - DN^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$,

$\therefore S_{\triangle MDE} = \frac{1}{2}DE \cdot MN = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$.

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

练习3

17. 如图, 矩形 $ABCD$ 和矩形 $CEFG$ 中, $AD = CG = 4$, $AB = CE = 2$, 连接 AF , H 是 AF 的中点, 那么 CH 的长是 () .



A. $2\sqrt{5}$

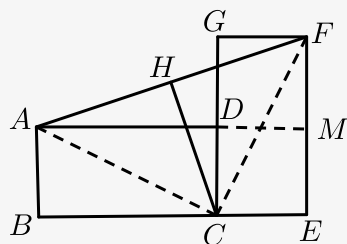
B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{10}$

D. 4

【答案】 C

【解析】 连接 AC 、 CF ，延长 AD 到 M 交 EF 于点 M ，



$\because$ 在矩形 $ABCD$ 和矩形 $CEFG$ 中， $AD = CG = 4$ ， $AB = CE = 2$ ，

$\therefore AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ， $CF = 2\sqrt{5}$ ，

$AF = \sqrt{AM^2 + MF^2} = \sqrt{(4+2)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{10}$ ，

$\therefore AC^2 + CF^2 = (2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 40 = AF^2$ ，

$\therefore \triangle ACF$ 是直角三角形，

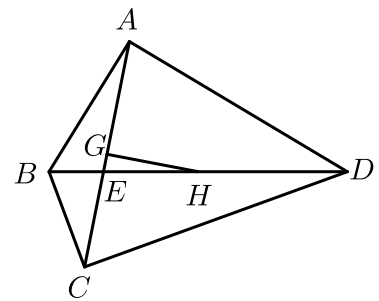
$\therefore$ 点 H 是 AF 的中点，

$\therefore CH = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} = \sqrt{10}$ ，

故选：C．

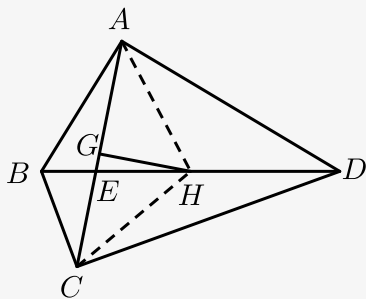
【标注】 【知识点】勾股定理的综合应用

18. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$ ， AC 、 BD 相交于点 E ， G ， H 分别是 AC ， BD 的中点，如果 $\angle BEC = 80^\circ$ ，那么 $\angle GHE$ 的度数是 _____ ．



【答案】 10°

【解析】 如图，连接 AH 、 CH ，



$\because \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ ， H 为 BD 的中点，

$\therefore AH = CH = \frac{1}{2}BD$ ，

$\because G$ 为 AC 的中点，

$\therefore GH \perp AC$ ，即 $\angle HGE = 90^\circ$ ，

$\because \angle BEC = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle GEH = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle GHE = 10^\circ$ 。

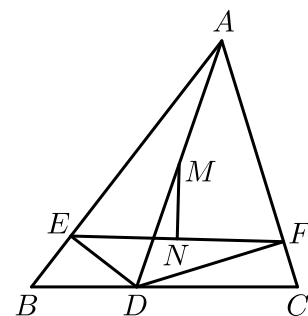
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

【知识点】直角三角形的两个锐角互余

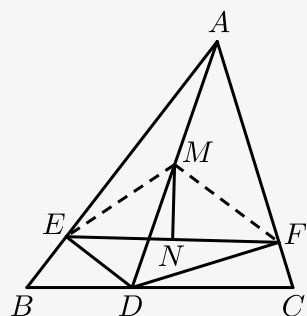
19. 共斜边模型的应用：

- (1) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 边上一点，过 D 点作 $DE \perp AB$ 于 E ， $DF \perp AC$ 于 F ， M 、 N 分别是 AD 、 EF 的中点。求证： $MN \perp EF$ 。



【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 连接 ME 、 MF ,



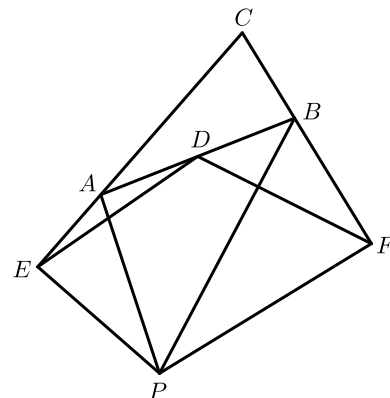
$\because DE \perp AB, DF \perp AC,$
 $\therefore \angle AED = \angle AFD = 90^\circ,$
 $\because M$ 是 AD 的中点 ,
 $\therefore EM = \frac{1}{2} AD = FM,$
 $\therefore \triangle MEF$ 是等腰三角形 ,
 $\because N$ 是 EF 的中点 ,
 $\therefore MN \perp EF.$

【标注】 【知识点】 直角三角形斜边中线性质的应用

【能力】 推理论证能力

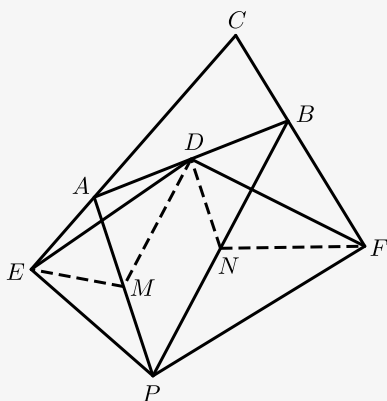
|| 例题4

20. 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , D 为 AB 的中点 , 分别延长 CA 、 CB 到点 E 、 F , 使 $DE = DF$, 过 E 、 F 分别作 CA 、 CB 的垂线 , 相交于 P . 求证 : $\angle PAE = \angle PBF$.



【答案】 证明见解析 .

【解析】 如图 , 分别取 AP 、 BP 的中点 M 、 N , 连接 EM 、 DM 、 FN 、 DN .



$\because D$ 是 AB 的中点 , M 是 AP 的中点 , N 是 BP 的中点 ,
 $\therefore DM \parallel BN$, $DM = BN$, $DN \parallel AM$, $DN = AM$,
 $\therefore \angle AMD = \angle BND$,
 又 $\because M$ 、 N 分别是 $\text{Rt}\triangle AEP$ 、 $\text{Rt}\triangle BFP$ 斜边的中点 ,
 $\therefore EM = AM = DN$, $FN = BN = DM$,
 $\therefore \triangle AEM$ 、 $\triangle BNF$ 均为等腰三角形 ,
 又 $\because DE = FD$,
 $\therefore \triangle DEM \cong \triangle FDN$,
 $\therefore \angle EMD = \angle DNF$,
 $\therefore \angle AME = \angle BNF$,
 又 $\because \triangle AME$ 、 $\triangle BNF$ 均为等腰三角形 ,
 $\therefore \angle PAE = \angle PBF$.

【标注】 【知识点】 中位线定理及其应用

练习4

21. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 边的中点.

- (1) 如图1, BD , CE 分别是 $\triangle ABC$ 的两条高, 连接 MD , ME , 则 MD 与 ME 的数量关系是 _____; 若 $\angle A = 70^\circ$, 则 $\angle DME =$ _____ $^\circ$.

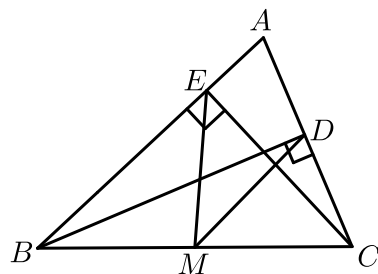


图1

- (2) 如图2, 点 D , E 在 $\angle BAC$ 的外部, $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 分别是以 AB , AC 为斜边的直角三角形, 且 $\angle BAD = \angle CAE = 30^\circ$, 连接 MD , ME .

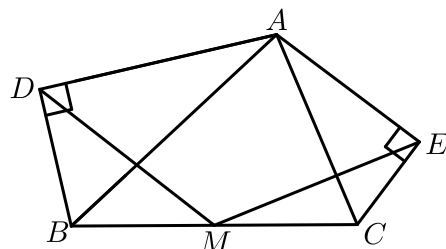


图2

- ① 判断(1)中 MD 与 ME 的数量关系是否仍然成立, 并证明你的结论.
② 求 $\angle DME$ 的度数.
- (3) 如图3, 点 D , E 在 $\angle BAC$ 的内部, $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 分别是以 AB , AC 为斜边的直角三角形, 且 $\angle BAD = \angle CAE = \alpha$, 连接 MD , ME . 直接写出 $\angle DME$ 的度数(用含 α 的式子表示).

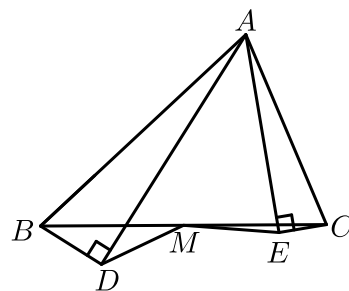


图3

【答案】 (1) $MD = ME$; 40

(2) ① $MD = ME$ 仍然成立, 证明见解析.

② 120° .

(3) $180^\circ - 2\alpha$.

【解析】(1) $\because BD, CE$ 分别是 $\triangle ABC$ 的两条高, M 是 BC 边的中点,

$$\therefore EM = \frac{1}{2}BC = BM, DM = \frac{1}{2}BC = CM,$$

$$\therefore MD = ME, \angle MEB = \angle ABC, \angle MDC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle DME = 180^\circ - \angle EMB - \angle DMC$$

$$= 180^\circ - (180^\circ - 2\angle ABC) - (180^\circ - 2\angle ACB)$$

$$= 180^\circ - 2\angle A$$

$$= 40^\circ.$$

故答案为: $MD = ME, 40$.

(2) ① $MD = ME$ 仍然成立;

分别取 AB, AC 的中点 F, H , 连接 FD, FM, HE, HM ,

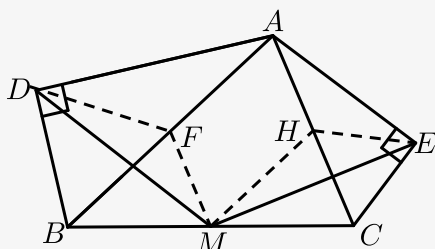


图2

$\because$ 点 F, M 分别是 AB, BC 的中点,

$\therefore FM$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$$\therefore FM \parallel AC, FM = \frac{1}{2}AC.$$

$$\therefore \angle BFM = \angle BAC.$$

$\because H$ 是 AC 的中点,

$\therefore EH$ 是 $\text{Rt}\triangle AEC$ 的中线.

$$\therefore EH = \frac{1}{2}AC = AH.$$

$$\therefore FM = EH.$$

同理可证, $MH = DF$.

$$\therefore DF = \frac{1}{2}AB = AF,$$

$$\therefore \angle FDA = \angle FAD.$$

$$\therefore \angle BFD = \angle FDA + \angle FAD = 2\angle FAD.$$

$$\therefore \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BFD = 60^\circ$$

$$\therefore \angle DFM = \angle BFD + \angle BFM = 60^\circ + \angle BAC.$$

同理可证, $\angle MHE = 60^\circ + \angle BAC$.

$$\therefore \angle DFM = \angle MHE.$$

在 $\triangle DFM$ 和 $\triangle MHE$ 中,

$$\therefore MD = EM .$$

$$= 120^\circ.$$

$$= 180^\circ - 2\alpha .$$

28